1, 2, 3. Формулировка задачи оптимизации поиска равновесных объемов и цен в сетевом аукционе поставщиков и потребителей одного товара с ограничениями на передачу. Определение равновесных цен в сетевом аукционе. Финансовый баланс в сетевом аукционе с ограничениями на передачу.

Постановка задачи:

$c_п$ — ценовая заявка потребителей $п \in \Pi$ (готовность купить 1 единицу товара по цене не выше $c_п$)

$c_г, г \in \Gamma$ — ценовые заявки генераторов (готов продать 1 единицу товара по цене не ниже $c_г$)

Найти равновесные цены и объемы $x_п$ и $x_г$, которые являются **индивидуально рациональными** стратегиями участников.

Математическая модель

Функция благосостояния рынка:

$$\sum_{п\in\Pi} c_п x_п - \sum_{г\in\Gamma} c_г x_г \to \max_{x_г, x_п}$$
$$\sum x_п - \sum x_г = 0, x_п \in [0, \overline{x_п}], x_г \in [0, \overline{x_г}]$$

Равновесие:

$$L(x,\lambda) = \sum_{\Pi}(c_п - \lambda)x_п + \sum_{\Gamma}(\lambda - c_г)x_г \to \max \sim \sum_{\Pi}\max_{x_п}(c_п - \lambda)x_п + \sum_{\Gamma}\max_{x_г}(\lambda - c_г)x_г$$

$$c_п - \lambda - \pi_п^+ + \pi_п^- = 0, п \in \Pi$$
$$\lambda - c_г - \pi_г^+ + \pi_г^-, г \in \Gamma$$

Финансовый баланс:

$$\lambda\left(\sum_{\Pi} x_п\right) - \lambda\left(\sum_{\Gamma} x_г\right) = 0, \text{ экономический смысл множителя лагранжа } \lambda \text{равновесная цена на рынке}$$

Территориально распределенный аукцион:

В задаче фигурирует генераторы (поставщики) в узле s: $г \in s : \Gamma_s$ и потребители в узле $s : п \in s : \Pi_s$.

Задача: найти равновесие с учетом перетолков товара между узлами и ограничений на пропускную способность сети.

Формулировка задачи:

$$(1) g(x_п, x_г) = \sum_{п\in\Pi} c_п x_п - \sum_{г\in\Gamma} c_г x_г \to \max$$
$$(2) \sum_{r\in B(s)} f_{rs} - \sum_{k\in A(s)} f_{sk} = \sum_{п\in\Pi_s} x_п - \sum_{г\in\Gamma_s} x_г \quad \forall s = \overline{1,N} \Rightarrow h(x_п, x_г, f)$$
$$(3) \quad -\underline{f_{rs}} \le f_{rs} \le \overline{f_{rs}} \quad (r,s) \Rightarrow k(f)$$
$$(4) \quad 0 \le x_г \le V_i, г \in \Gamma \Rightarrow \overline{u}(x_г), \underline{u}(x_г)$$
$$(5) \quad 0 \le x_п \le V_п, г \in \Pi \Rightarrow \overline{v}(x_п), \underline{v}(x_п)$$

$x_г$ — объем поставщика (генератора) $г \in \Gamma, V_г$ — максимальный объем;

$x_п$ — объем потребления $п \in \Pi$, $V_п$ максимальный объем.

$с_г$ — целевая заявка поставщика (генератора) $г \in \Gamma$

$с_п$ — целевая заявка потребителя $п \in \Pi$

$s = \overline{1,N}$ — индекс узла.

$A(s)$ — множество ветвей выходящих из узла $s \quad \{r | \exists(s,r)\}$

$B(s)$ — множество ветвей входящих в узел s $\{r | \exists(r,s)\}$

f_{rs} — переменная потока по ветви (r, s). Если $f_{rs} > 0$, то поток из r в s, если $f_{rs} < 0$, то поток из s в r.

(1) — целевой функцией является функция благосостояния рынка

(2) — материальный баланс (финансовый баланс) в узле s (ограничения баланса спроса и предложения в узле s сети)

(3) — Ограничения на пропускную способность сети

(4) и (5) — ограничения поставки и потребления.

Решая задачу оптимизации с помощью функции Лагранжа вводим следующий множители Лагранжа (неотрицательные):

(2) λ_s

(3) $\sigma^+_{rs}, \sigma^-_{rs}$ (цена пропускной способности ветви (r, s))

(4) $\pi^-_{\text{г}}, \pi^+_{\text{г}}$

(5) $\pi^-_{\text{п}}, \pi^+_{\text{п}}$

После решения задачи оптимизации (поиск равновесных объемов и цен) получим:

λ^*_s —равновесная цена в узле s.

$x^*_{\text{п}}, x^*_{\text{г}}$ — объемы участников аукциона.

Для билета 2.

Выпишем функцию Лагранжа:

$$L = g(x_{\text{п}}, x_{\text{г}}) - \sum_s \lambda_s h(x_{\text{п}}, x_{\text{г}}, f) - \sum \sigma^+_{rs}\overline{k}_{rs} + \sum \sigma^-_{rs}\underline{k}_{rs} - \sum \pi^+_{\text{г}}\overline{u}_{\text{г}} + \sum \pi^-_{\text{г}}\underline{u}_{\text{г}} - \sum \pi^+_{\text{п}}\overline{v}_{\text{п}} + \sum \pi^-_{\text{п}}\underline{v}_{\text{п}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\text{г}}} = -c_{\text{г}} + \lambda_s - \pi^+_{\text{г}} + \pi^-_{\text{г}} = 0, \text{г} \in \Gamma_s$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\text{п}}} = c_{\text{п}} - \lambda_s - \pi^+_{\text{п}} + \pi^-_{\text{п}} = 0, \text{п} \in \Pi_s$$

$$\lambda_s = c_{\text{г}} + \pi^+_{\text{г}} - \pi^-_{\text{г}}, \text{г} \in \Gamma_s \quad c_{\text{п}} = \lambda_s + \pi^+_{\text{п}} - \pi^-_{\text{п}}, \text{п} \in \Pi_s$$

Если максимальный объем $\Rightarrow \pi^-_{\text{г}} = 0 \Rightarrow \lambda_s$ — цена и поставщик имеет дополнительную прибыль.

Если заявка потребителя удовлетворена полностью $\Rightarrow \pi^-_{\text{п}} = 0 \Rightarrow$ потребитель платит меньше, чем $\overline{c_{\text{п}}}$.

$$\frac{\partial L}{\partial f_{rs}} = -\lambda_s + \lambda_r + \sigma^+_{rs} - \sigma^-_{rs}$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_{rs}} = 0 = \begin{cases} \lambda_s = \lambda_r, & -\underline{f_{rs}} < f_{rs} < \overline{f_{rs}} \\ \lambda_s = \lambda_r + \sigma^+_{rs} > \lambda_r, & f_{rs} = \overline{f_{rs}}, \sigma^+_{rs} > 0 \\ \lambda_s = \lambda_r - \sigma^-_{rs} < \lambda_r, & f_{rs} = -\underline{f_{rs}}, \sigma^-_{rs} > 0 \end{cases}$$

Таким образом узловая цена не убывает в направлении потока и строго возрастает, если ограничение насыщено (то есть достигает предельных ограничений на поток из узла s в узел r).

Для билета 3.

Финансовый баланс в узле s (материальный баланс).

$$\sum_{\text{п} \in \Pi_s} x_{\text{п}} - \sum_{\text{г} \in \Gamma_s} x_{\text{г}} = \sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk}$$

Домножаем уравнение баланса в узле s на λ_s

$$\lambda_s \left(\sum_{\text{п} \in \Pi_s} x_{\text{п}} - \sum_{\text{г} \in \Gamma_s} x_{\text{г}} \right) = \left(\sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk} \right)$$

Просуммируем правую и левую части по s:

$$\sum_s \lambda_s \left(\sum_{п \in П_s} x_п\right) - \sum_s \left(\sum_{г \in Г_s} x_г\right) = \text{сумма денег, заплаченных потребителями - сумма денег, полученных ген}$$

$$\sum_s \lambda_s \left(\sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk}\right) = \sum_{(i,j) \in E} f_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = \sum_{(i,j) \in E} \left(\sigma^+_{i,j}\overline{f_{ij}} + \sigma^-_{ij}\underline{f_{ij}}\right) \geq 0,$$

так как

$$f_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = \begin{cases} 0, & \lambda_i = \lambda_j \\ \sigma^+_{ij}\overline{f_{ij}}, & f_{ij} = \overline{f_{ij}} \\ \sigma^-_{ij}\underline{f_{ij}}, & f_{ij} = -\underline{f_{ij}} \end{cases}$$